Lunghezza di un arco di curva.

Il teorema di Guldino:

- **superficie di rivoluzione;**
- **volume di rivoluzione.**

12 Lunghezza di un arco di curva

Consideriamo sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 6.50) della curva γ i punti $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$, dove $P_0 \equiv A$ e $P_n \equiv B$. La somma:

$$\sum_{i=0}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

rappresenta la lunghezza della poligonale inscritta nell'arco.
A ogni scelta dei punti $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ associamo il numero:

$$\delta = \text{massimo}\ \{\overline{P_0P_1};\ \overline{P_1P_2};\ \ldots;\ \overline{P_{n-1}P_n}\}$$

Si chiama **lunghezza** dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ il limite, se esiste finito, delle lunghezze delle poligonali inscritte al tendere a zero di δ:

$$l = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

Determiniamo ora, sotto opportune condizioni, la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ di curva nei casi in cui la curva stessa sia data in forma cartesiana, in forma parametrica o in forma polare.

Forma cartesiana

Sia: $$y = f(x) \qquad x \in [a; b]$$

l'equazione della curva γ con f derivabile con derivata continua nell'intervallo $I = [a; b]$.
Siano $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$ gli estremi dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ di γ di cui si vuole calcolare la lunghezza.
Considerati sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 6.50) i punti:

$$P_1(x_1; f(x_1)),\quad P_2(x_2; f(x_2)),\quad \ldots,\quad P_{n-1}\ (x_{n-1}; f(x_{n-1}))$$

risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

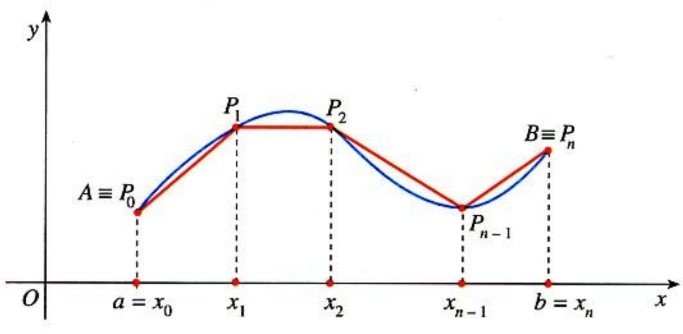


Figura 6.50

Per il teorema di Lagrange applicato alla f relativamente all'intervallo $[x_{i-1}; x_i]$, risulta:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot f'(\xi_i)$$

essendo ξ_i un opportuno punto interno all'intervallo $[x_{i-1}; x_i]$.
Pertanto risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}$$

La lunghezza della poligonale è data da:

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}$$

Le lunghezze l_n rappresentano somme integrali della funzione:

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

relativamente all'intervallo $[a; b]$.

Essendo $f'(x)$ continua è continua anche $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ e quindi, poiché al tendere a zero delle lunghezze $\overline{P_{i-1}P_i}$ delle corde tendono a zero anche le lunghezze $(x_i - x_{i-1})$, le somme integrali l_n convergono a

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Assumiamo tale formula come "definizione di **lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$.**
Detto $P = (x; f(x))$, con $x > a$, un punto di γ, la lunghezza $l(x)$ dell'arco $\widehat{AP}$ è:

$$\boxed{l(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\, dt}$$

La lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ è quindi funzione dell'ascissa x del punto P e risulta:

$$l'(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

Esempi

16 *Calcolare la lunghezza della circonferenza* $x^2 + y^2 = r^2$.

Consideriamo l'arco:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 \le x \le \frac{r}{\sqrt{2}}$$

che corrisponde all'ottava parte della circonferenza.
La funzione $\sqrt{r^2 - x^2}$ è continua e dotata di derivata continua nell'intervallo $\left[0; \frac{r}{\sqrt{2}}\right]$.
Risulta:

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

quindi:

$$l = \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)}\, dx = \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \cdot \left[\text{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} = r\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{r\pi}{4}$$

Si ritrova per la lunghezza della circonferenza il valore ben noto $2\pi r$.

17 *Calcolare la lunghezza dell'arco $\widehat{OA}$ della curva γ: $y = x\sqrt{x}$, essendo $O(0;0)$ e $A(4;\,8)$ (fig. 6.51).*

Essendo:

$$y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

si ha:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

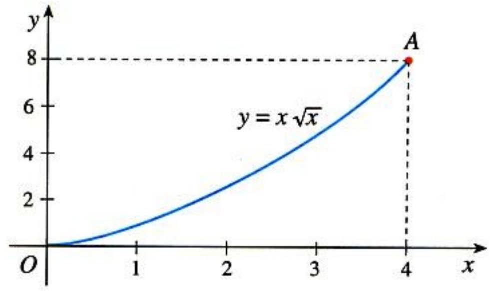


Figura 6.51

18 *Calcolare la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$ di catenaria*

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *con* $x \in [-1;\,1]$ (fig. 6.52).

Essendo:

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

risulta:

$$1+(y')^2 = 1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

Risulta quindi:

$$l = 2\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = e - e^{-1}$$

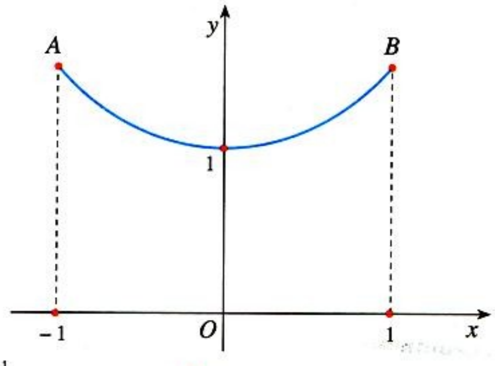


Figura 6.52

Forma parametrica

Siano

$$x = \varphi(t) \qquad \text{e} \qquad y = \psi(t) \qquad t \in \mathrm{I} = [a;\,b]$$

le equazioni parametriche di una curva γ, essendo φ e ψ funzioni continue e derivabili con derivate continue e mai contemporaneamente nulle in I.

La lunghezza dell'arco di curva è data da:

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \qquad [6.13]$$

Esempio

19 *Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide (vedi vol. 1, § 15.5, proprietà d):*

$$x = a\,(t - \text{sen}\,t) \qquad\qquad y = a\,(1-\cos t)$$

relativamente a un giro completo, cioè per $t \in [0;\,2\pi]$.

Si ha:

$$x'(t) = a\,(1-\cos t) \qquad y'(t) = a\,\text{sen}\,t \qquad x'^2 + y'^2 = 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\,\text{sen}^2\frac{t}{2}$$

e, poiché per $0 \le t \le 2\pi$, $\text{sen}\,\dfrac{t}{2}$ è non negativo, sostituendo si ha:

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\text{sen}^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\text{sen}\frac{t}{2}\,dt = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

Forma polare

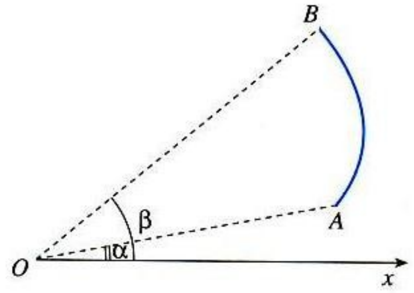
Sia

$$\rho = \rho(\vartheta) \qquad \vartheta \in [\alpha; \beta]$$

l'equazione in coordinate polari di una curva γ, essendo $\rho(\vartheta)$ continua con derivata continua per $\vartheta \in [\alpha; \beta]$.

La lunghezza dell'arco di curva $\widehat{AB}$ (fig. 6.53) è data da:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho'(\vartheta)]^2 + [\rho(\vartheta)]^2}\, d\vartheta$$



■ *Figura 6.53*

Esempio

20 *Calcolare la lunghezza dell'arco di spirale logaritmica* $\rho = e^{a\vartheta}$ *per* $0 \le \vartheta \le \pi$.

Si ha:

$$\rho'(\vartheta) = ae^{a\vartheta}$$

$$l = \int_0^\pi \sqrt{e^{2a\vartheta} + a^2 e^{2a\vartheta}}\, d\vartheta = \sqrt{a^2+1} \int_0^\pi e^{a\vartheta} d\vartheta = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}[e^{a\pi} - 1]$$

13 Il teorema di Guldino

Superficie di rivoluzione

Se ruotiamo il grafico della funzione $y = f(x) \ge 0$, $x \in [a; b]$, intorno all'asse delle ascisse, otteniamo una **superficie di rivoluzione.**

Se $f(x) = mx$, $m > 0$, $x \in [a; b]$, con $a > 0$, otteniamo una superficie di rivoluzione particolare, un tronco di cono.

La sua area si ottiene dalla formula della superficie laterale del cono retto di raggio di base ρ e apotema a_p:

$$\text{Area} = \pi\, \rho\, a_p$$

Quindi l'area della superficie di rivoluzione relativa a $y = mx$ per $x \in [a; b]$, $0 < a < b$, sarà (fig. 6.54):

$$\text{Area} = \pi\rho_b \overline{OB} - \pi\rho_a \overline{OA}$$

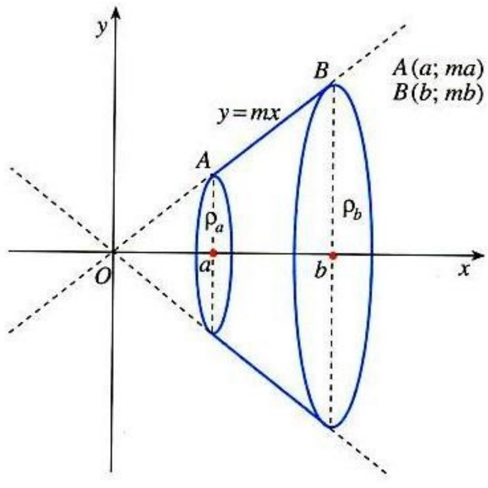
e tenuto conto che

$$\rho_b = mb \qquad \overline{OB} = b\sqrt{1+m^2}$$

$$\rho_a = ma \qquad \overline{OA} = a\sqrt{1+m^2}$$

si ha:

$$\text{Area} = \pi m\sqrt{1+m^2}\,(b^2 - a^2)$$



■ *Figura 6.54*

espressione che può essere proposta nella forma equivalente:

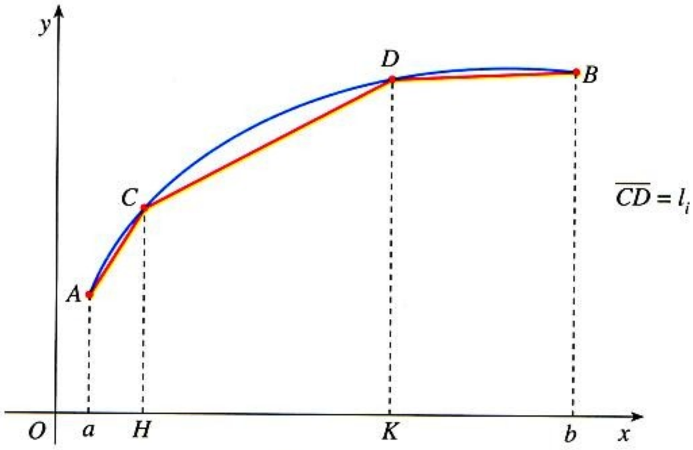
$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b mx\sqrt{1+m^2}\,dx$$

ovvero, ricordato che $mx = f(x)$:

$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad [6.14]$$

Il caso di una superficie ottenuta per rotazione di un grafico curvo può essere studiato servendosi dell'esperienza fatta precedentemente con la rotazione di un segmento:

- decomponiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali, ciascuna di lunghezza $h = \dfrac{b-a}{n}$;
- su ogni parte disegniamo il segmento corda come in figura 6.55, e indichiamo con $\varphi_k(x)$ l'espressione di primo grado che lo rappresenta;



■ *Figura 6.55*

Guldin (italianizzato in Guldino) **Paul** Matematico gesuita svizzero (San Gallo 1577 – Graz 1643). Autore di *Centro-baryca*, pubblicato nel 1640, e strenuo oppositore della teoria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri. I teoremi qui esposti sono impropriamente a lui attribuiti: essi si devono a *Pappo di Alessandria*, celebre matematico vissuto nel III secolo d.C.

- facciamo ruotare la poligonale P inscritta che approssima il grafico di $f(x)$;
- l'area della superficie di rotazione di P è somma delle aree dei tronchi di cono che la compongono, e quindi servendosi della formula [6.14]:

$$\begin{aligned}\text{Area(P)} &= 2\pi\int_a^{a+h} \varphi_1(x)\sqrt{1+\varphi_1'(x)^2}\,dx + \\ &+ 2\pi\int_{a+h}^{a+2h} \varphi_2(x)\sqrt{1+\varphi_2'(x)^2}\,dx + \\ &+ \ldots + \\ &+ 2\pi\int_{a+(n-1)h}^{b} \varphi_n(x)\sqrt{1+\varphi_n'(x)^2}\,dx\end{aligned}$$

Tenuto conto che in ciascun tratto si ha:

$$\varphi_k(x) \cong f(x) \qquad \varphi_k'(x) \cong f'(x)$$

tale somma approssima l'integrale

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Osservato che la superficie generata dalla rotazione di P approssima quella generata dalla rotazione del grafico di $f(x)$, si riconosce che il precedente integrale rappresenta l'**area della superficie di rivoluzione**:

$$\text{Area} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad [6.15]$$

Il baricentro

Detti m ed M il minimo e il massimo di $f(x)$, $x \in [a; b]$ si ha:

$$m\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \le \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \le M\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Ricordato che la lunghezza L della curva grafico è

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

dividendo membro a membro per il fattore positivo L, si ottiene:

$$m \le \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \le M$$

da cui:

$$\frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = y_G \qquad [6.16]$$

essendo y_G un conveniente valore di $[m; M]$ che prende il nome di **ordinata del baricentro del grafico**.
A questo punto l'area della superficie di rivoluzione, ottenuta ruotando il grafico di $f(x)$ intorno all'asse x, espressa dalla [6.15], può anche esprimersi come

$$\text{Area}_x = (2\pi\,|\,y_G\,|)\cdot L \qquad [6.17]$$

I due fattori che compaiono nell'espressione trovata sono particolarmente espressivi:

- $2\pi\,|y_G|$ rappresenta la lunghezza della circonferenza di raggio $|y_G|$, essendo y_G l'ordinata del baricentro del grafico;
- L rappresenta la lunghezza della curva che si fa ruotare.

Tale espressione è detta **teorema di Guldino**.
Analogamente, ruotando il grafico attorno all'asse y, l'area della superficie di rivoluzione che si ottiene è:

$$\text{Area}_y = (2\pi\,|\,x_G\,|)\cdot L$$

essendo x_G l'ascissa del baricenro del grafico.

Esempi

21 Consideriamo la curva $\mathscr{C}$ composta dall'arco di circonferenza: $x^2 + y^2 = r^2$
appartenente al 1° quadrante. Sia $\sum$ la superficie di rivoluzione ottenuta ruotando $\mathscr{C}$ intorno all'asse delle x; essa costituisce una semisfera ed ha quindi area:

$$2\pi r^2$$

La lunghezza della curva che si è ruotata, un quarto di circonferenza, è:

$$\frac{\pi}{2}r$$

Quindi dal teorema di Guldino: $2\pi y_G \dfrac{\pi}{2} r = 2\pi r^2$

si può ricavare l'ordinata y_G (fig. 6.56) del baricentro:

$$y_G = \frac{2\pi r^2}{2\pi \frac{\pi}{2} r} = \frac{2r}{\pi}$$

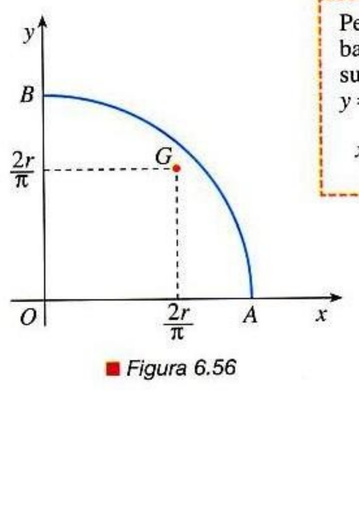


Figura 6.56

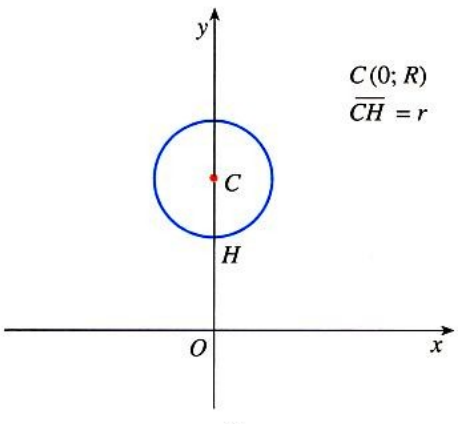
Per simmetria il baricentro G sta sulla bisettrice $y = x$; pertanto:

$$x_G = y_G = \frac{2r}{\pi}$$

22 Consideriamo la superficie di rivoluzione, detta **toro** (fig. 6.57*a*, *b*), ottenuta facendo ruotare la circonferenza:

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$

di centro nel punto $C(0; R)$, con $R > 0$, e raggio r intorno all'asse x, supponendo naturalmente $r < R$.



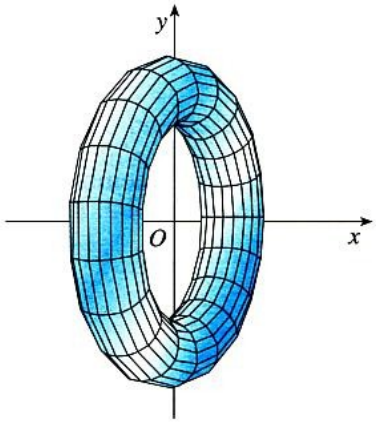


Figura 6.57

Riconosciuto che il baricentro della circonferenza non può che coincidere con il centro si ha:

$$y_G = R$$

Quindi, dal teorema di Guldino si trova l'area del toro come:

$$2\pi \cdot R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr$$

Volumi di rivoluzione

Un risultato analogo si ottiene relativamente al volume $\mathcal{V}$ dei solidi ottenuti per rotazione del dominio:

$$\mathrm{T}\colon a \le x \le b \qquad 0 \le y \le f(x)$$

attorno all'asse x.
Indicata ancora con y_G l'ordinata del baricentro fisico del dominio T e con $\mathcal{A}(\mathrm{T})$ l'area, il volume $\mathcal{V}$ del solido S è:

$$\mathcal{V} = 2\pi|y_G| \cdot \mathcal{A}(\mathrm{T}) \qquad [6.18]$$

Tale formula ha ancora il nome di **teorema di Guldino**.
Si notino le differenze con la precedente formula relativa all'area delle superfici di rivoluzione:

a) in luogo della lunghezza L della curva che si fa ruotare si trova l'area del dominio che si fa ruotare;
b) in luogo dell'ordinata del baricentro della curva si ha l'ordinata del baricentro del dominio.

Esempio

23 *Determinare le coordinate del baricentro del settore circolare T del cerchio:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

delimitato dall'asse x e dalla retta $y = \sqrt{3}x$.

Sia $\mathcal{V}$ il volume del solido di rivoluzione ottenuto ruotando T intorno all'asse x.
Si ha:

$$\mathcal{V} = \pi \cdot \left[\int_0^{\frac{r}{2}} 3x^2 dx + \int_{\frac{r}{2}}^{r} (r^2 - x^2) dx\right]$$

Quindi:
$$\mathcal{V} = \pi \cdot \left[\frac{r^3}{8} + r^2\left(r - \frac{r}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(r^3 - \frac{r^3}{8}\right) \right] = \frac{\pi r^3}{3}$$

Pertanto, dal teorema di Guldino, si può ricavare l'ordinata y_G del baricentro di T:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi r^3}{3} = 2\pi y_G \cdot \text{Area(T)}$$

Tenuto conto che Area (T) = $\frac{\pi r^2}{6}$ si ha:

$$y_G = \frac{r}{\pi}$$

In modo analogo, ruotando il settore attorno all'asse y si ottiene per l'ascissa x_G del baricentro (fig. 6.58):

$$x_G = \frac{\sqrt{3}}{\pi} r$$

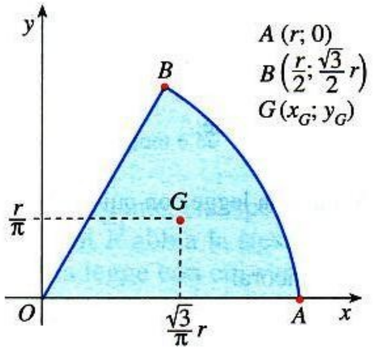


Figura 6.58